Вписанный тетраэдр

Андрей Петров*

(Dated: 23 января 2014 года)

Найдём угол между радиусами, проведёнными из центра описанной вокруг тетраэдра сферы к двум из его вершин. Заодно докажем, что вокруг тетраэдра можно описать сферу.

Пусть дан тетраэдр ABCD (см Рис. 1). Обозначим его сторону a. Опустим высоту AH на плоскость, содержащую его грань BCD. Прямоугольные треугольники AHC, AHD, AHB рав-

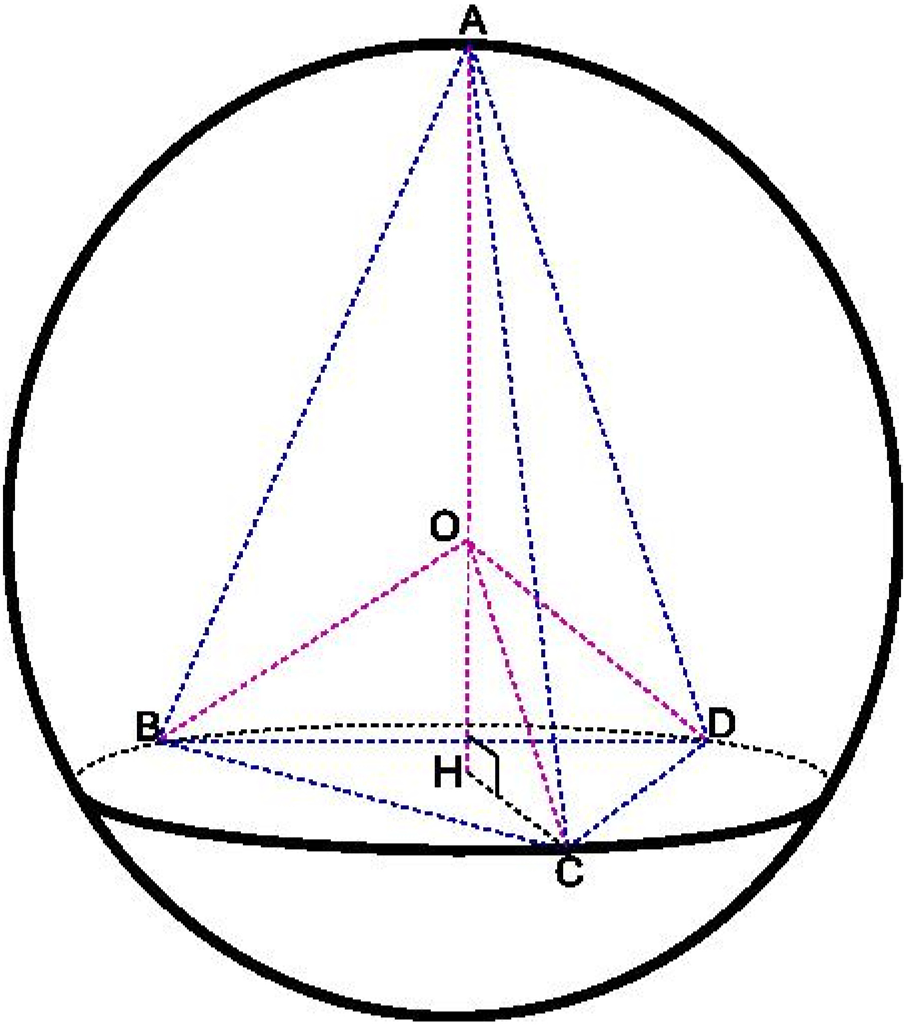

Рис. 1: Вписанный тетраэдр

*petrovandrej78@gmail.com

ны, поэтому BH=CH=DH, то есть H является центром описанной окружности треугольника BCD. Рассмотрим прямоугольный треугольник AHC.

$HC = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $AC = a$, $AH = \sqrt{a^2 - HC^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$, $\cos\angle HAC = \frac{AH}{AC} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдём на стороне AH такую точку O, что $AO = OC$. Обозначим $AO = OC = x$. По теореме косинусов из треугольника AOC имеем:

$$\begin{aligned} x^2 &= x^2 + a^2 - 2ax\cos\angle HAC, \\ x &= \frac{a}{2\cos\angle HAC} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если мы отложим от точки A на высоте AH отрезок AO длины $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, то расстояние OC будет равно AO. Аналогично, из рассмотрения треугольников AHB, AHD получаем, что $AO = OB = OD$. Поэтому вокруг тетреаэдра ABCD можно описать сферу радиуса $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ с центром в точке O. Применяя теорему косинусов к треугольнику AOC, получаем:

$$\begin{aligned} &AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2AOOC\cos\angle AOC = 2AO^2(1-\cos\angle AOC), \\ &a^2 = 2\frac{3a^2}{8}(1-\cos\angle AOC), \\ &\cos\angle AOC = -\frac{1}{3}, \quad \angle AOC = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109,47^\circ. \end{aligned}$$