Сечения эллипсоида

Андрей Петров

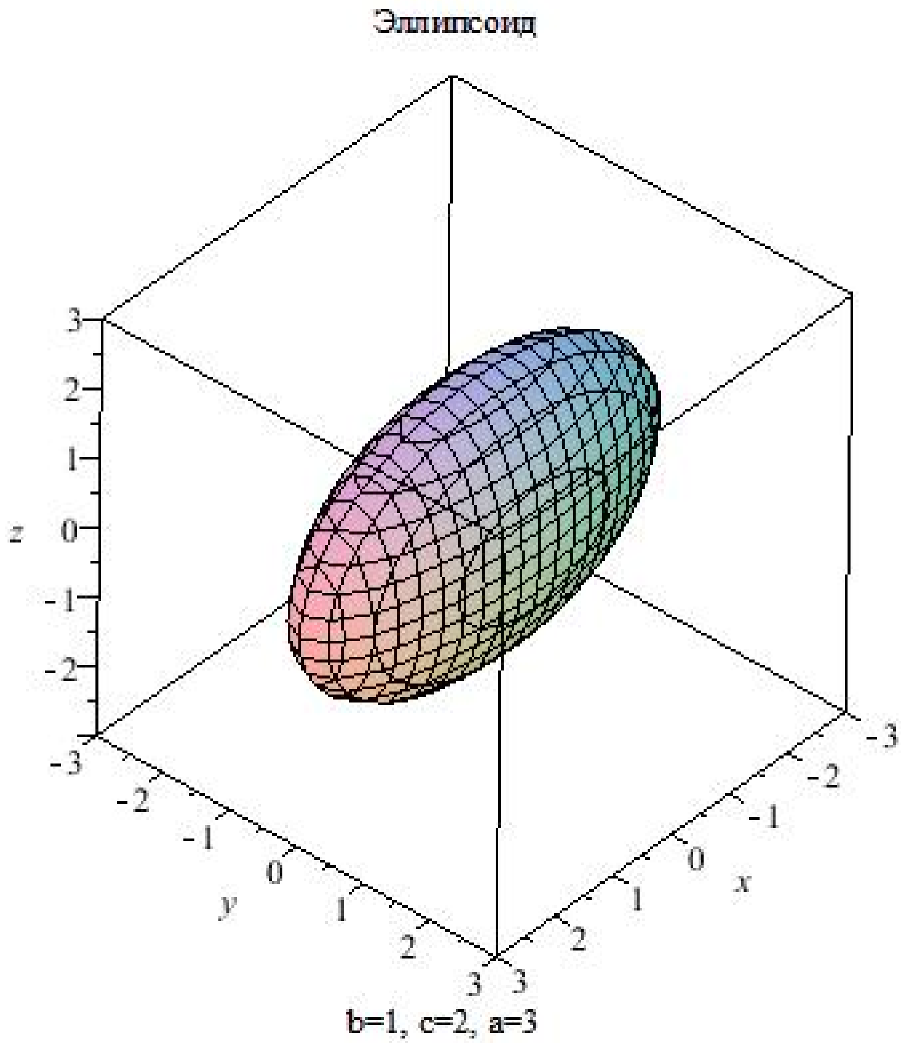
(Dated: 18 декабря 2012 года)

Рассмотрены эксцентриситеты сечений эллипсоида и составлено уравнение соответствующей поверхности. Показано, каким кривым соответствует переход точки в квадрат.

Об эллипсоиде, как и о других поверхностях второго порядка, подробно написано в книге А.В.Погорелова «Геометрия» 1983 года, глава VII. В этой статье попробуем отметить некоторые факты и формулы, касающиеся его сечений.

I. Эксцентриситеты трёх основных сечений эллипсоида

Рассмотрим эллипсоид с неравными полуосями $b < c < a$. В книге Погорелова указано, как повернуть и затем подвинуть произвольный эллипсоид, который задан уравнением в декартовой системе координат, чтобы его полуось длиной a была направлена вдоль оси абсцисс, полуось длиной b — вдоль оси ординат, а полуось длиной c — вдоль оси аппликат.



Тогда его уравнение будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

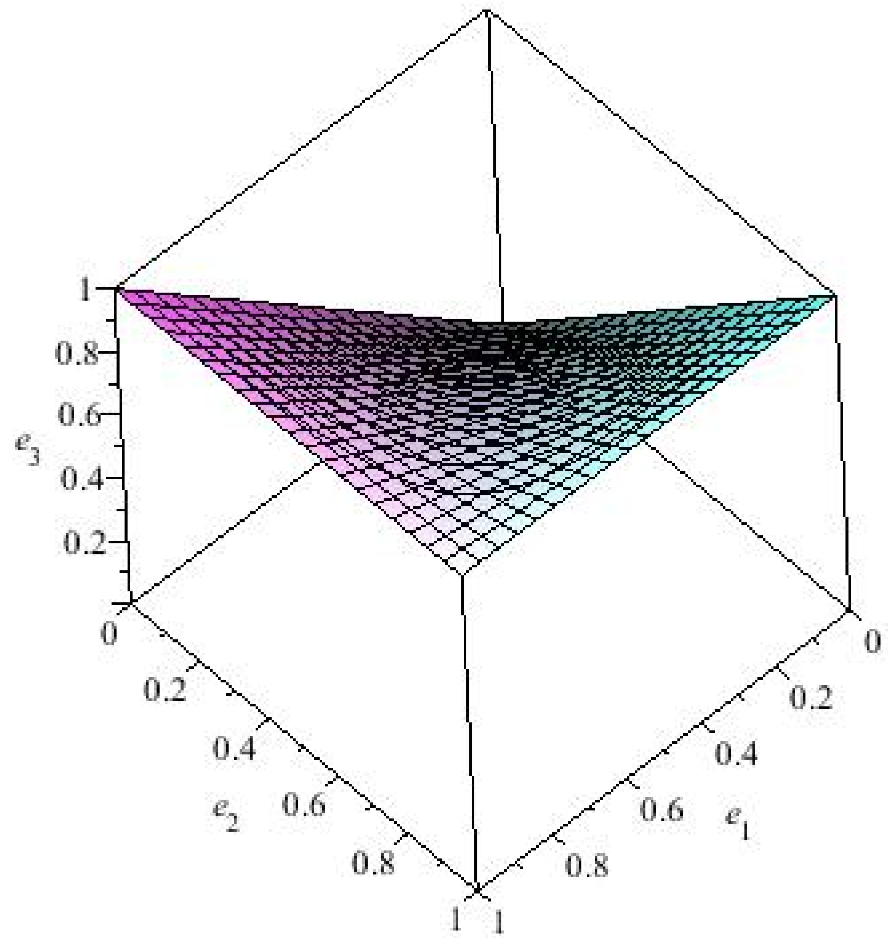
Подставляя в это уравнение поочерёдно $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, получаем уравнения трёх эллипсов, получающихся в сечении эллипсоида, соответственно, тремя плоскостями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Их эксцентриситеты:

$$e_1 = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c}, e_2 = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, e_3 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Выражая из первого уравнения c и подставляя во второе, получаем, что третий эксцентриситет определяется первыми двумя:

$$e_3 = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_1^2 e_2^2}$$

Отсюда следует, что третий эксцентриситет больше как первого, так и второго. Как и у любого эллипса, каждый эксцентриситет больше нуля и меньше единицы, в случае эксцентриситета равного нулю имеем окружность. При любом e_1 от нуля до единицы мы можем взять такие $b < c < a$, чтобы эксцентриситет e_2 принял также любое значение от нуля до единицы, то есть эксцентриситет e_3 — функция от двух переменных e_1 и e_2, определённая на квадрате $[0,1) \times [0,1)$. Вот её график:



Если рассматривать две независимые переменные и значения этой функции как координаты точки в трёхмерном пространстве, то определяющее функцию уравнение представляет собой поверхность четвёртого порядка:

$$z^2 - x^2 - y^2 + x^2y^2 = 0$$

В сечении её плоскостями $x = k$ (как и плоскостями $y = k$) получаем гиперболы, эксцентриситет которых при k меняющемся от нуля до единицы меняется от эксцентриситета школьной гиперболы $y = 1/x$ (квадратный корень из двух) до бесконечности. При $k = 0$ и $k = 1$ в сечении имеем прямые линии. При $z = 0$ в сечении имеем крестообразную кривую (см. книгу А.А.Савелов «Плоские кривые», 1960, стр. 167), а при $z = k$ и изменении k от нуля до единицы в сечении получаем при $|x|, |y| > 1$ — ветви кривой примерно такого же вида, как крестообразная, а при $|x|, |y| < 1$ — расширяющуюся точку, превращающуюся при $z = 1$ в квадрат.

II. Превращение точки в квадрат

Рассмотрим подробнее, что происходит при сечении поверхности из предыдущего раздела плоскостью $z = k$, $k = 0..1$, когда $x = -1..1$, $y = -1..1$. Зафиксируем $z = k$ из интервала $[0, 1)$. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим получаем:

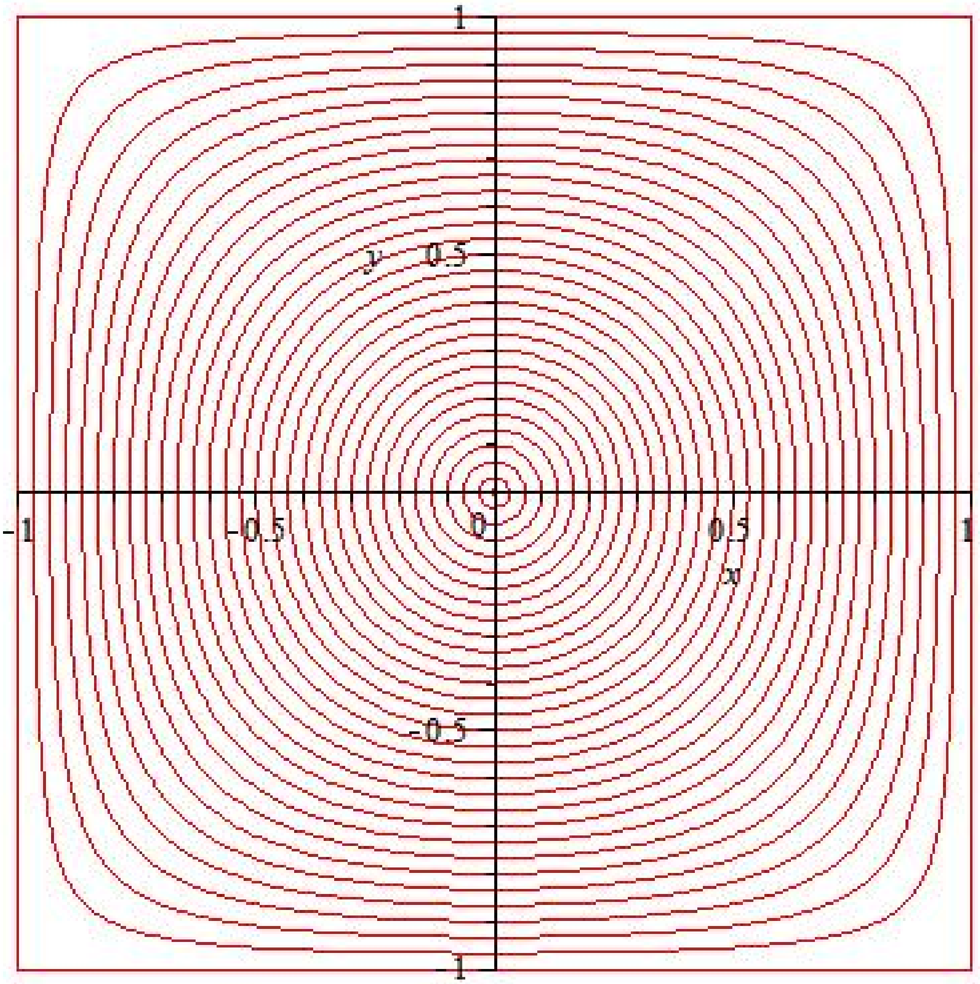
$$k^2 + \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} \geqslant x^2 + y^2, (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 4k^2 \geqslant 0$$

Решая это неравенство относительно $x^2 + y^2$, имеем, что для x и y из интервала $(-1, 1)$ справедливы следующие неравенства:

$$0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2 - 2\sqrt{1 - k^2}$$

То есть, кривая при указанных значениях x и y при каждом фиксированном $k < 1$ лежит внутри окружности радиуса, равного квадратному корню из правой части второго неравенства. Отсюда следует, что при малых k координаты x и y точек кривой будут также малы. И так как в этом случае x^2y^2 будет малым по сравнению с $x^2 + y^2$, то для малых k кривая почти не будет отличаться от окружности. Постепенно на положение точек дуги окружности, особенно близких к прямым $x = y$ и $x = -y$, начинает влиять слагаемое x^2y^2, и вдоль этих прямых кривая вытягивается по сравнению с вышеуказанной окружностью, тогда как точки этой окружности $(k, 0)$, $(-k, 0)$, $(0, k)$, $(0, -k)$ по-прежнему принадлежат кривой.

Таким образом, в начале расширения кривая приблизительно представляет собой окружность растущего радиуса, а затем постепенно превращается в квадрат путём вытягивания вдоль прямых $x = y$, $x = -y$.



$x^2 + y^2 - x^2 y^2 - k^2 = 0$, k=0,1,..,30

III. Круговые сечения эллипсоида

У сферы каждое сечение, содержащее центр, круговое, у эллипсоида вращения — только одно круговое сечение, а у эллипсоида с неравными полуосями их два. Именно круговые сечения эллипсоида имеют большое значение в кристаллооптике, где каждому кристаллу сопоставляется эллипсоид, называемый оптической индикатрисой, при этом прямая, перпендикулярная круговому сечению называется оптической осью кристалла. Соответственно, все кристаллы делятся на изотропные, одноосные и двухосные. Подробнее об этом см., например, в статье «кристаллооптика» из Большой Советской Энциклопедии.

[1] Погорелов А.В. Геометрия. — М.:Наука, 1983

[2] Савелов А.А. Плоские кривые. — М.:Физматгиз, 1960