Стакан из бумаги

Андрей Петров*

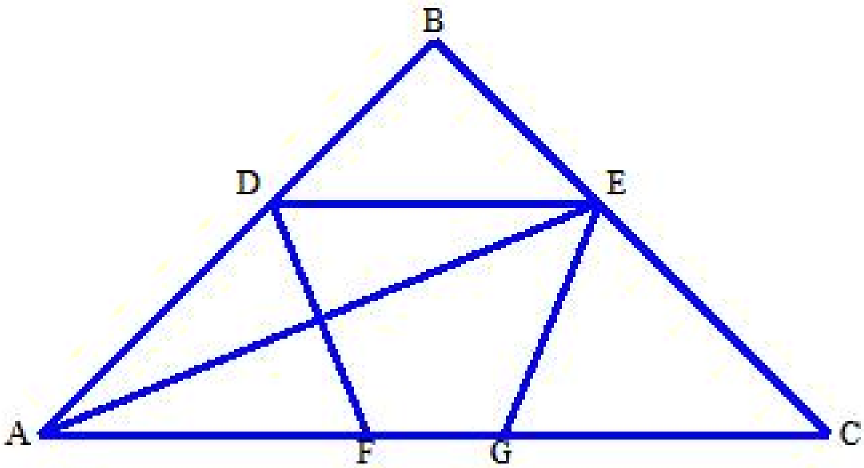
(Dated: 27 ноября 2012 года)

Вычислим параметры стакана из бумаги, представленного, например, на сайте www.origami.ru. Фигура эта достаточно известная. По-английски она часто называется «paper cup» или «drinking cup» и часто встречается в книгах по оригами. Одна из ранних ссылок на эту фигуру и способ её складывания — книга «Isao Honda, “The World of Origami”, 2nd. ed., 6th printing, 1970», страница 46, где эта фигура называется просто «cup». Мы будем называть её довольно распространённым в русскоязычных источниках по оригами названием «стакан».

I. Параметры стакана

Обычно рассматривается стакан, сделанный из квадратного листа бумаги с первым перегибанием по диагонали. То есть, в равнобедренном треугольнике ABC угол B прямой. Однако мы рассмотрим общий случай, когда B не обязательно прямой угол. То есть, наш начальный треугольник ABC получен перегибанием ромба по его диагонали. Поворотом точки B вокруг A так, чтобы отрезок AB лёг на основание AC, получаем биссектрису AE угла BAC. Далее, совмещая A с E получаем отрезок DF, а совмещая C с D — отрезок EG. После складывания отрезок FG будет линией дна стакана, а отрезок DE — половиной его верхней кромки.

*petrovandrej78@gmail.com



Поскольку A совмещается с E, DAE совмещается с углом DEA, поэтому угол DEA равен углу DAE и равен углу EAC, т.к. AE — биссектриса. А отсюда следует, что DE параллелен AC. Поэтому BDE подобен ABC и $DA = EC$. Далее получаем, что CD — также биссектриса (угла C), т.к. треугольники AEC и ADC равны, поскольку ABC равнобедренный. Так как A накладывается на E, развёрнутый угол AE линией перегиба DF делится пополам, поэтому DF перпендикулярен AE. Значит, AE и высота и биссектриса треугольника DAF, значит, $AF = DA$. Аналогично, $EC = GC$. Кроме того, как уже указывалось, угол DAE равен углу DEA, поэтому ADE равнобедренный и $DA = DE$. Итак, $AF = DA = EC = GC = DE$.

Сторона AB нам известна, это боковая сторона начального треугольника (сторона квадрата, если угол В прямой). Сторону AC мы также знаем, это основание треугольника (диагональ квадрата если угол B — прямой). Обозначим $AB = d, AC = c$ и выразим через них длину линии дна стакана FG, которую обозначим l. Треугольники BDE и ABC подобны, $AF = DA = EC = GC = DE$, поэтому:

$$\frac{AB - DA}{AB} = \frac{DE}{AC}, \frac{d - DA}{d} = \frac{DA}{c}, DA = \frac{dc}{d + c}$$

$$l = FG = AC - AF - GC = c - 2DA = \frac{c(c - d)}{d + c}$$

Поскольку для квадрата $c = d\sqrt{2}$, то в этом случае $l = d(3\sqrt{2} - 4)$. Далее, мы можем определить высоту стакана h, равную высоте треугольника DAF и радиус его верхней окружности a, половина которой равна $DE = DA$:

$$h = \frac{c\sqrt{4d^2 - c^2}}{d(d+c)}, a = \frac{dc}{\pi(d+c)}$$

В случае квадрата получаем $h = d(\sqrt{2} - 1)$, $a = (2 - \sqrt{2})d/\pi$. Итак, мы получили выражения для высоты стакана h, длины его линии дна l и радиуса верхней окружности a в зависимости от параметров начального треугольника. Теперь заметим, что из выражения для l следует, что $c > d$, кроме того, c как сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, т.е. $c < 2d$. Поэтому стакан мы можем сложить только из такого равнобедренного треугольника, угол между боковыми сторонами которого больше 60 градусов.

При рассмотрении стакана захотелось посмотреть, как описывается одна похожая на него поверхность, подробнее о ней — в статье «Поверхность разных эксцентриситетов».

---

1 Isao Honda, *The World of Origami*, Japan Publications Trading Company, 6th printing, 1970