Горизонтальные солнечные часы

Андрей Петров*

(Dated: 4 октября 2012 года)

Простейшие солнечные часы — это гномон, установленный вертикально на поверхности земли. Тень от верхушки гномона в течение дня описывает кривую линию, и каждый день года кривые разные. Вид этой кривой зависит от широты места установки гномона. По идее, восходящей, возможно, к Аполлонию Пергскому, эта линия представляет собой коническое сечение. Выясним, где тут сам конус, его элементы, секущая плоскость.

I. Конус и его сечение

Секущей плоскостью является поверхность земли, а сам конус образован прямыми линиями, соединяющими верхушку гномона с положением Солнца в различные моменты данного дня года. Эти линии, продолженные до земной поверхности и образуют боковую поверхность конуса, который называется двойным. Вершина конуса — верхушка гномона. Ось конуса — прямая линия, направленная от верхушки гномона параллельно оси вращения Земли (то есть примерно в направлении Полярной звезды). Сам гномон не что иное, как перпендикуляр из вершины конуса на секущую плоскость. Как известно, угол наклона направления на Полярную звезду к поверхности Земли равен широте места наблюдения, таким образом, секущая плоскость пересекает ось конуса под углом, равным широте. Нетрудно также заметить, что угол наклона образующей конуса к его оси дополняет склонение Солнца в данный день года до 90 градусов.

II. Параметры сечения

Математическая модель в основном ясна. Теперь можно заглянуть или вспомнить раздел учебника геометрии Погорелова для вузов, 1983 года издания, где выводится уравнение конического сечения и формула для его эксцентриситета. Там приведён чертёж, использующий шар, касающийся боковой поверхности конуса и секущей плоскости. Это — так называемый

*petrovandrej78@gmail.com

шар Данделена. Там же выведена формула для эксцентриситета, имеющая очень простой вид. Применяя её для случая нашего конуса, сразу получаем формулу для эксцентриситета нашего конического сечения — кривой, которую описывает тень от верхушки гномона в течение дня:

$$e = \frac{\cos\varphi}{\sin\delta}$$

Здесь в числителе берётся косинус от широты, а в знаменателе — синус склонения Солнца. Нам нужно определить положение сечения относительно точки установки гномона и установить форму сечения. А для этого кроме его эксцентриситета нужно знать большую полуось, расстояние от точки установки гномона до сечения и его ориентацию. Легче всего установить ориентацию: ось сечения параллельна полуденной линии — прямой, вдоль которой отбрасывает тень гномон, когда Солнце днём находится в плоскости небесного меридиана. Продолжая геометрические рассуждения с использованием шаров Данделена, приходим сначала к формуле расстояния от точки установки гномона до вершины сечения:

$$d = h\,\mathrm{tg}(\varphi - \delta),$$

здесь h — высота гномона. Далее, после значительных упрощений, получаем формулу для большой полуоси:

$$a = \frac{h\sin 2\delta}{\cos 2\delta + \cos 2\varphi}$$

Наконец, для случая параболы получаем значение её параметра p:

$$p = h\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

Чтобы выяснить окончательное положение и форму сечения остаётся рассмотреть различные варианты, такие как положение Солнца в Северном или Южном полушарии, и установить, когда будет получаться эллипс, когда — гипербола, когда — парабола, а когда и просто прямая линия.

III. Различные случаи

- $0^\circ < \varphi < 66,6^\circ$ с.ш. Кривая — ветвь гиперболы, эксцентриситет которой равен абсолютному значению e, большая полуось — a, расстояние от гномона до вершины равно абсолютному значению d. Её вершина расположена к северу от гномона при $\varphi > \delta$, совпадает с гномоном при $\varphi = \delta$ или расположена к югу от гномона при $\varphi < \delta$. А сама ветвь простирается к югу от своей вершины при $\delta > 0^\circ$ либо к северу — при $\delta < 0^\circ$. Заметим, что ветвь при $\delta > 0^\circ$ и ветвь при $\delta < 0^\circ$ для той же широты — две ветви одной и той же гиперболы и, следовательно расстояние между их вершинами равно $2a$.

- $0^\circ < \varphi < 66,6^\circ$ ю.ш. Кривая — ветвь гиперболы, эксцентриситет которой равен абсолютному значению e, большая полуось — a, расстояние от гномона до вершины равно абсолютному значению d. Её вершина расположена к югу от гномона при $\varphi > -\delta$, совпадает с гномоном при $\varphi = \delta$ или расположена к северу от гномона при $\varphi < -\delta$. А сама ветвь простирается к югу от своей вершины при $\delta > 0^\circ$ либо к северу — при $\delta < 0^\circ$. Заметим, что ветвь при $\delta > 0^\circ$ и ветвь при $\delta < 0^\circ$ для той же широты — две ветви одной и той же гиперболы и, следовательно расстояние между их вершинами равно $2a$.

- $66,6^\circ$ с.ш.$< \varphi < 90^\circ$. Кривая при $\delta > 90^\circ - \varphi$ — эллипс, при $\delta = 90^\circ - \varphi$ — парабола, при $\varphi - 90^\circ < \delta < 90^\circ - \varphi$ — ветвь гиперболы. Эксцентриситет кривой равен абсолютному значению e, большая полуось (для эллипса и ветви гиперболы) равна абсолютному значению a, расстояние от гномона до вершины равно абсолютному значению d. Эта вершина расположена к северу от гномона, а сама кривая простирается к югу от неё для эллипса и параболы и к северу — для ветви гиперболы.

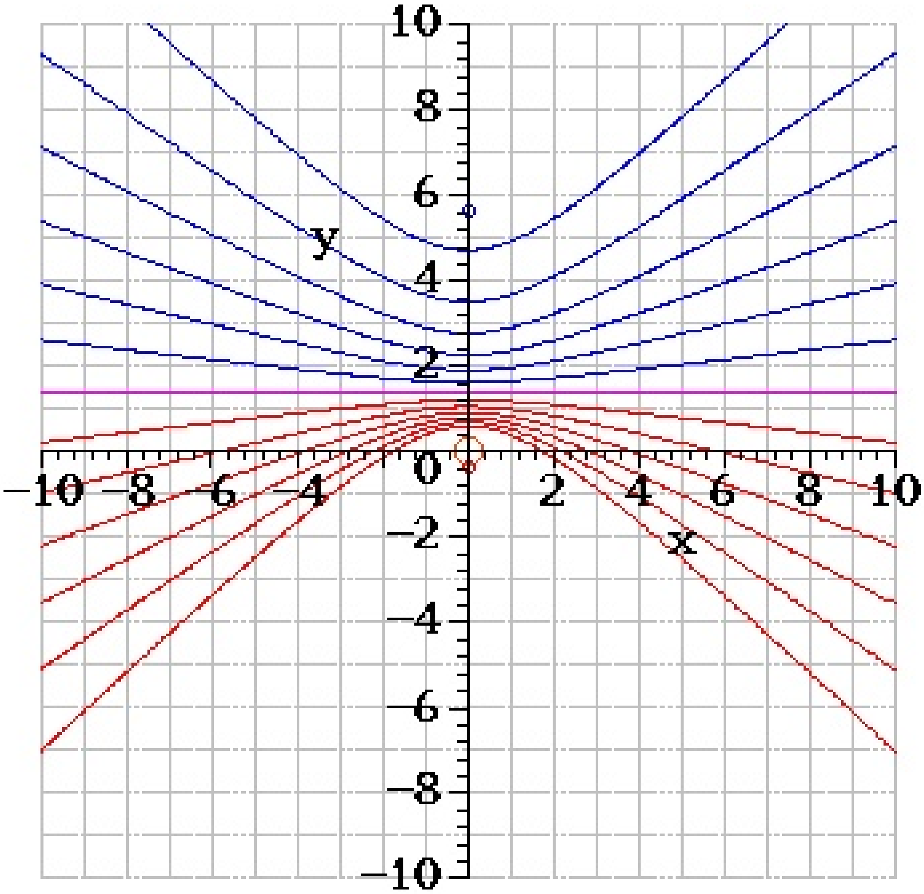
- $66,6^\circ$ ю.ш.$< \varphi < 90^\circ$. Кривая при $-\delta > 90^\circ - \varphi$ — эллипс, при $-\delta = 90^\circ - \varphi$ — парабола, при $\varphi - 90^\circ < -\delta < 90^\circ - \varphi$ — ветвь гиперболы. Эксцентриситет кривой равен абсолютному значению e, большая полуось (для эллипса и ветви гиперболы) равна абсолютному значению a, расстояние от гномона до вершины равно абсолютному значению d. Эта вершина расположена к югу от гномона, а сама кривая простирается к северу от неё для эллипса и параболы и к югу — для ветви гиперболы.

- При $\delta = 0^\circ$ во всех предыдущих случаях получается прямая, перпендикулярная полуденной линии и расположенная на расстоянии d от гномона к северу, если широта точки установки гномона северная, или к югу, если широта точки установки гномона южная.

- $\varphi = 0°$. При $\delta > 0°$ и $\delta < 0°$ описание кривой почти такое же, как для $0° < \varphi < 66,6°$ с.ш. Но при $\delta = 0°$ кривая — прямая линия, проходящая через гномон перпендикулярно полуденной линии.
- $\varphi = 66,6°$ с.ш. или $\varphi = 66,6°$ ю.ш. описание кривой — почти такое же, как для $66,6°$ с.ш.$< \varphi < 90°$ или $66,6°$ ю.ш.$< \varphi < 90°$ соответственно. Но эллипс получиться не может.
- $\varphi = 90°$ с.ш. или $\varphi = 90°$ ю.ш. Кривая при $\delta > 0°$ или $\delta < 0°$ соответственно — окружность радиуса равного абсолютному значению a с центром в основании гномона.

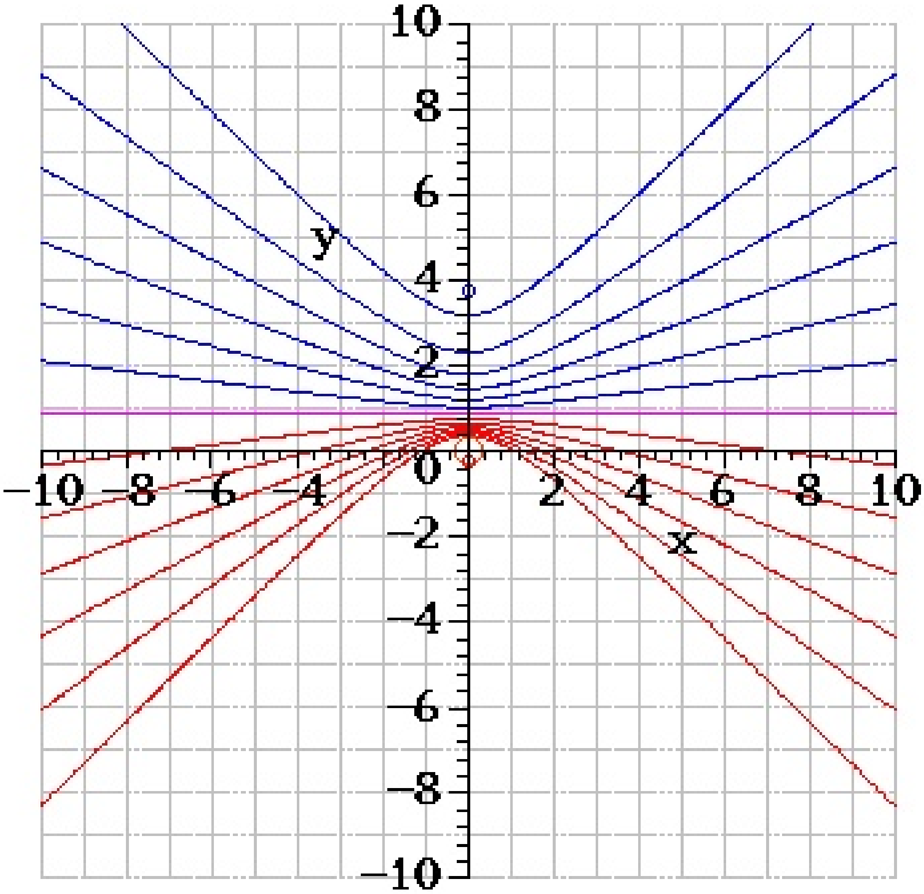
IV. Примеры

1. Рассмотрим кривые, получающиеся для гномона высотой 1 метр, расположенного на широте $\varphi = 54,68°$ с.ш. В этом и последующих примерах начало координат поместим в точке установки гномона, ось y направим на север, а ось x перпендикулярно ей. И построим кривые для $\delta = 23,4°$;$\delta = 19,5°$;$\delta = 15,6°$;$\delta = 11,7°$; $\delta = 7,8°$;$\delta = 3,9°$ — красные; $\delta = -23,4°$;$\delta = -19,5°$;$\delta = -15,6°$;$\delta = -11,7°$; $\delta = -7,8°$;$\delta = -3,9°$ — синие и $\delta = 0°$ — фиолетовая.

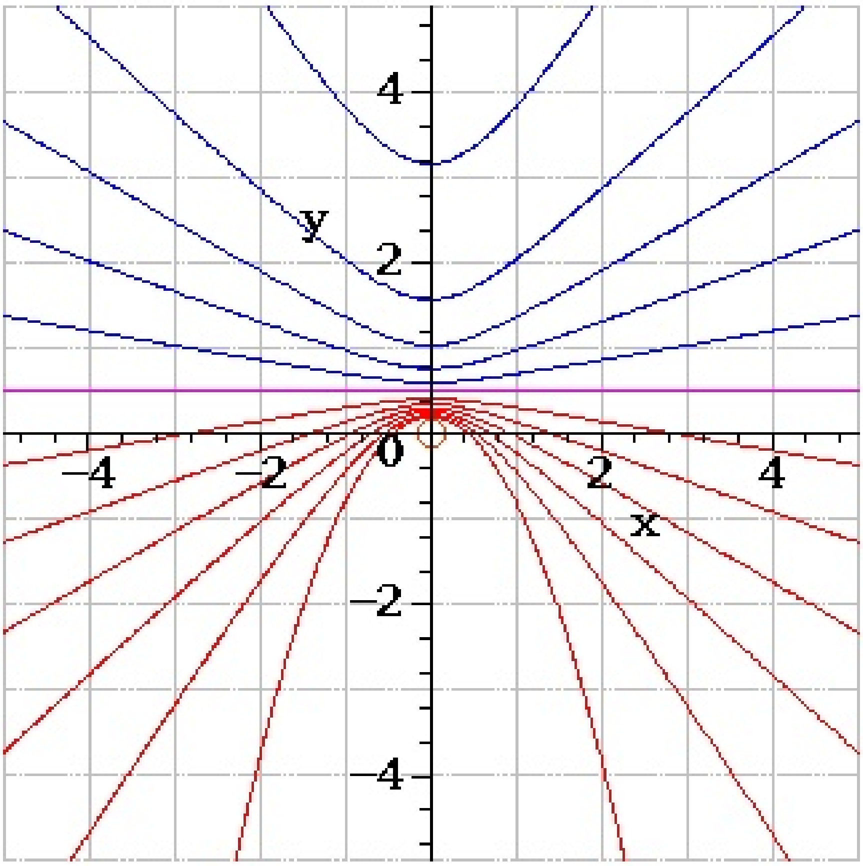


Таким образом, в данном случае получили гиперболы и прямую линию.

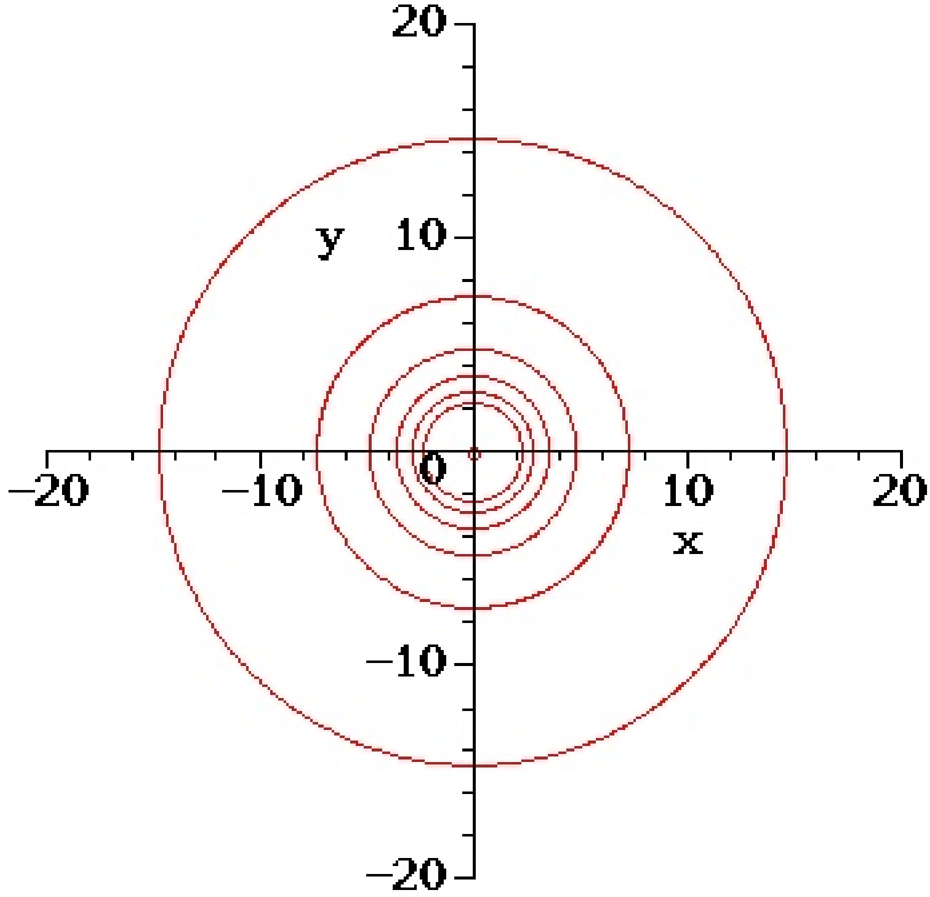
2. Школьная гипербола. Посмотрим, при каких условиях (высоте гномона и широте места его установки) тень от верхушки гномона в дни летнего и зимнего солнцестояний опишет гиперболу с эксцентриситетом и большой полуосью, равными таковым у школьной гиперболы $y = 1/x$. Подставляя в указанные выше формулы значения $e = \sqrt{2}$, $\delta = 23,4^\circ$ и $a = \sqrt{2}$, получаем, что $h = \sqrt{2} \cdot \mathrm{tg}(23,4^\circ) \approx 0,61$ метра, а $\cos\varphi = \sqrt{2} \cdot \sin(23,4^\circ)$, откуда $\varphi \approx 55,83^\circ$ северной широты (для южной широты такие же значения, только $\delta = -23,4^\circ$). Нарисуем получившиеся кривые (опять гиперболы и прямая) для гномона, установленного на широте $\varphi \approx 55,83^\circ$ и таких же δ, как в примере **1**. Верхняя и нижняя из этих кривых и есть две ветви школьной гиперболы.



3. Школьная парабола. Зададимся вопросом, на какой широте и при какой высоте гномона h тень от верхушки гномона в день летнего солнцестояния опишет параболу с таким же параметром p (т.е. расстоянием от фокуса до директрисы), как у школьной параболы $y = x^2$. В день летнего солнцестояния верхушка гномона установленного в Северном полушарии опишет параболу, если он установлен на широте $\varphi = 90^\circ - 23,4^\circ = 66,6^\circ$. Поскольку у школьной параболы $p = 1/2$, то $h = 1/2 \cdot \mathrm{tg}(23,4^\circ) \approx 0,22$ метра. При таких же δ, как в примере **1**, получаются школьная парабола (нижняя красная кривая), гиперболы и прямая линия (фиолетовая), только при $\delta = -23,4^\circ$ кривой нет, так как уже наступает полярная ночь.



4. Окружность. Тень от гномона на Северном полюсе (и Южном полюсе), очевидно, описывает окружность в течение суток во время полярного дня. Радиус этой окружности равен $h/\operatorname{tg}\delta$. Ниже приведены окружности для гномона высотой 1 метр, установленного на Северном полюсе и $\delta = 23,4°$;$\delta = 19,5°$;$\delta = 15,6°$;$\delta = 11,7°$; $\delta = 7,8°$;$\delta = 3,9°$ — от самой внутренней к самой внешней. При $\delta = 0°$ и $\delta < 0°$ уже наступает полярная ночь, поэтому линий нет.



V. Часовые деления

Итак, мы выяснили, что тень от верхушки гномона лежит на определённой линии, вид которой и расположение для данной широты и дня года можно определить, исходя из склонения Солнца в этот день, по указанным формулам. Какой же наклон имеет тень гномона по отношению к полуденной линии в разное время суток, иными словами, как определить положение тени от верхушки гномона в определённый час дня?

Здесь обнаруживается недостаток простейших солнечных часов — гномона-шеста, установленного на поверхности земли. Направление тени от него равно азимуту Солнца плюс 180 градусов. Азимут же Солнца можно вычислить из Первого астрономического треугольника, и зависеть он будет не только от широты и часового угла Солнца, но и от склонения Солнца.

То есть для разных дней года нужно использовать различные часовые линии.

Один способ состоит в том, чтобы не менять конструкцию часов, а нанести часовые деления непосредственно на линию, которую описывает тень от верхушки гномона в данный день года. Очевидно, такие линии для всех дней года обычно не проведёшь — слишком большие часы нужны для нанесения раздельных 365 линий, а потом ещё нужно будет на каждую нанести часовые деления, поэтому придётся ограничиться десятком линий, скажем, для начала каждого месяца, и такие солнечные часы будут не очень точными.

Более распространён другой способ: сделать гномон в виде прямоугольного треугольника, один катет которого находится в той же точке, что и гномон-шест и направлен вертикально, а другой лежит на поверхности земли (или кадрана) и направлен вдоль полуденной линии в сторону положения Солнца в полдень. Причём этот второй катет имеет такую длину, что гипотенуза оказывается параллельной оси вращения Земли. Оказывается, что для такой конструкции солнечных часов положение часовых делений будет зависеть только от широты и часового угла, то есть, одно и то же их положение будет годиться для всех дней года. Формулу для длины второго катета l получаем из прямоугольного треугольника, используя тот факт, что наклон земной оси равен широте, а формулу для угла наклона α часовых линий к полуденной линии — из соотношений в прямоугольном сферическом треугольнике:

$$l = h \operatorname{ctg} \varphi, \operatorname{tg} \alpha = \sin \varphi \operatorname{tg} 15^\circ m,$$

где m — число часов до или после полудня. Заметим, что линии, описываемые верхушкой такого гномона в данный день года будут такими же, как для гномона-шеста, установленного вертикально в точке пересечения первого и второго катетов, и для создания таких часов достаточно приделать наклонную часть к гномону-шесту и провести часовые деления, а линии перерисовывать не надо. Такой тип солнечных часов — с треугольным гномоном — обычно и называется «горизонтальные солнечные часы». Заметим, что они показывают истинное солнечное время, которое для получения поясного времени нужно еще перевести в среднее солнечное время, используя уравнение времени, а уже среднее солнечное время, используя долготу места установки перевести в поясное, а если действует летнее время — прибавить ещё час.

1 Погорелов А.В. Геометрия. — М.:Наука, 1983