Вписанная и описанная окружности сферического треугольника

Андрей Петров[*]

(Dated: 25 апреля 2013 года; Revised 2 мая 2017 года)

У равностороннего треугольника на плоскости все стороны равны между собой, и все углы равны 60 градусам. Отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной окружности для такого треугольника равно двум. Более того, по теореме Эйлера, для любого треугольника на плоскости это отношение не может быть меньше двух. Нетрудно установить, что в равнобедренном треугольнике, в зависимости от угла между равными его сторонами, оно может принимать любое значение от двух до бесконечности.

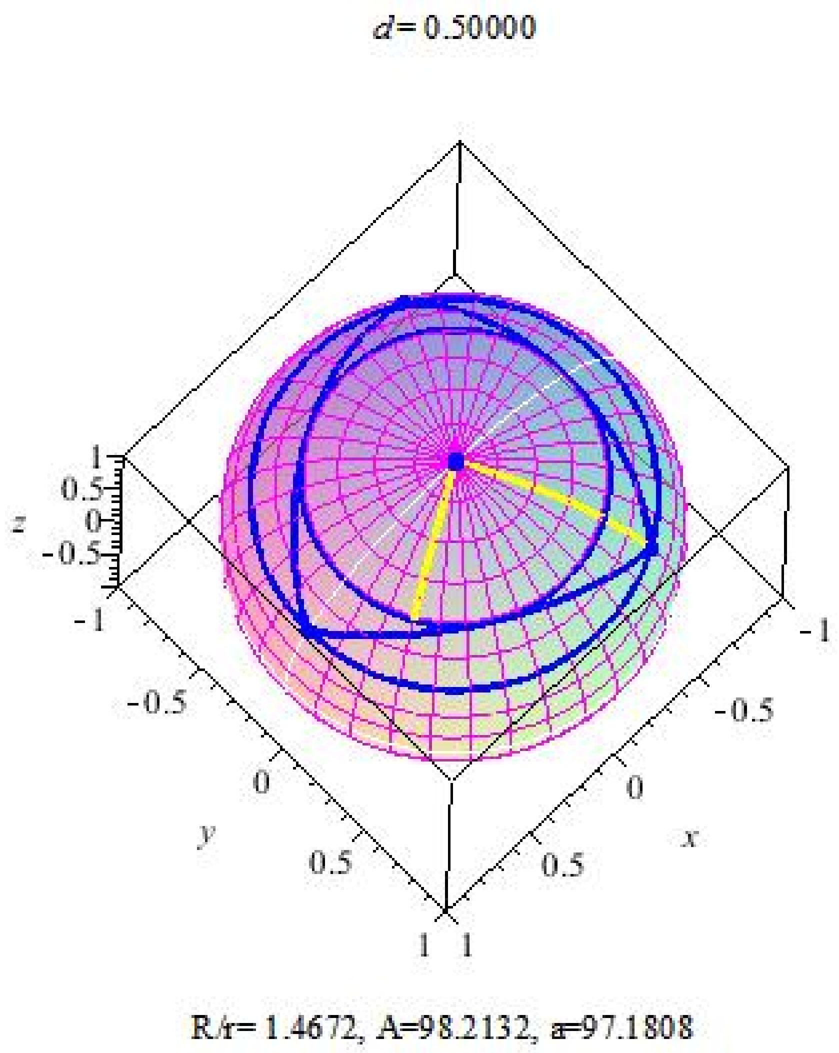
Теперь посмотрим, как обстоит дело в равностороннем сферическом треугольнике. Обычно у сферического треугольника не только углы, но и стороны измеряются в градусах, то есть, не длиной дуги соответствующего большого круга сферы, а градусной мерой этой дуги. Так вот, в случае равностороннего сферического треугольника по сферической теореме косинусов имеем, что задав угол в интервале от 60 до 180 градусов мы сможем так подобрать градусную меру стороны, чтобы получился равносторонний сферический треугольник. Мы видим, что на данной сфере существует бесчисленное множество равносторонних сферических треугольников с самыми разными значениями трёх их равных углов. При этом, когда стороны сферического треугольника стремятся к 120 градусам, углы стремятся к 180 градусам. Если же стороны стремятся к нулю, углы стремятся к 60 градусам, что фактически является проявлением.теоремы Лежандра, по которой при малых углах сферический треугольник становится похож на соответствующий плоский.

Несколько сложнее, но тоже достаточно нетрудно, при удовлетворительном знании основных формул сферической тригонометрии, установить ещё один факт, являющийся центральным в этой статье. А именно: в равностороннем сферическом треугольнике отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной стремится к двум при сторонах стремящихся к нулю и стремится к одному при сторонах, стремящихся к 120 градусам. Причём для каждого значения в интервале $(1, 2)$ существует соответствующий сферический треугольник. Заметим, что по определению центр описанной (вписанной) окружности, как и

[*] petrovandrej78@gmail.com

сама окружность, лежит на сфере, а её радиус — градусная мера дуги большого круга от центра до одной из точек этой окружности. Получается, что равносторонние сферические треугольники в этом смысле как бы дополняют треугольники на плоскости, у которых указанное отношение изменяется от двух до бесконечности. Ниже представлен исходный текст программы для Maple 14, демонстрирующей изменение отношения радиуса описанной к радиусу вписанной окружности равностороннего сферического треугольника в зависимости от расстояния от центра единичной сферы до плоскости, в которой лежат три вершины сферического треугольника (для запуска его нужно сначала скачать и открыть в Maple):
sferich_tr.mw
В тексте программы прокомментировано большинство выполняемых действий.

Так выглядит один из нарисованных этой программой сферических треугольников и его описанная и вписанная окружности:



здесь жёлтым цветом показаны радиусы вписанной (меньший) и описанной окружностей, белая полоска — нулевой меридиан, A — угол треугольника в градусах, a — сторона треугольника в градусах, d — расстояние от центра сферы до описанной окружности, R/r — отношение радиуса описанной к радиусу вписанной окружности.