Поверхность разных эксцентриситетов

Андрей Петров*

(Dated: 30 ноября 2012 года)

Рассмотрены поверхности, в сечении которых плоскостью получаются кривые второго порядка — гиперболы и эллипсы. Показано, что существует поверхность, названная поверхностью разных эксцентриситетов, в сечении которой различными плоскостями получаются кривые второго порядка всех возможных эксцентриситетов от нуля до бесконечности. Вычислен объём тела, ограниченного такой поверхностью.

Известно, что эксцентриситет эллипса заключен между 0 и 1 и зависит только от отношения большой и малой полуосей. Пересекая конус плоскостью, параллельной его основанию, мы получаем эллипсы такого же эксцентриситета, что и у его основания. Только наклоняя плоскость к оси конуса, мы можем даже в случае кругового конуса получить в сечении эллипсы любого эксцентриситета. Конус — кривая второго порядка. При рассмотрении стакана из бумаги появилась идея посмотреть, что представляет собой поверхность, пересекая которую параллельными плоскостями, можно получить эллипсы любого эксцентриситета. Её я и хотел бы описать здесь подробнее.

I. Вывод уравнений поверхности

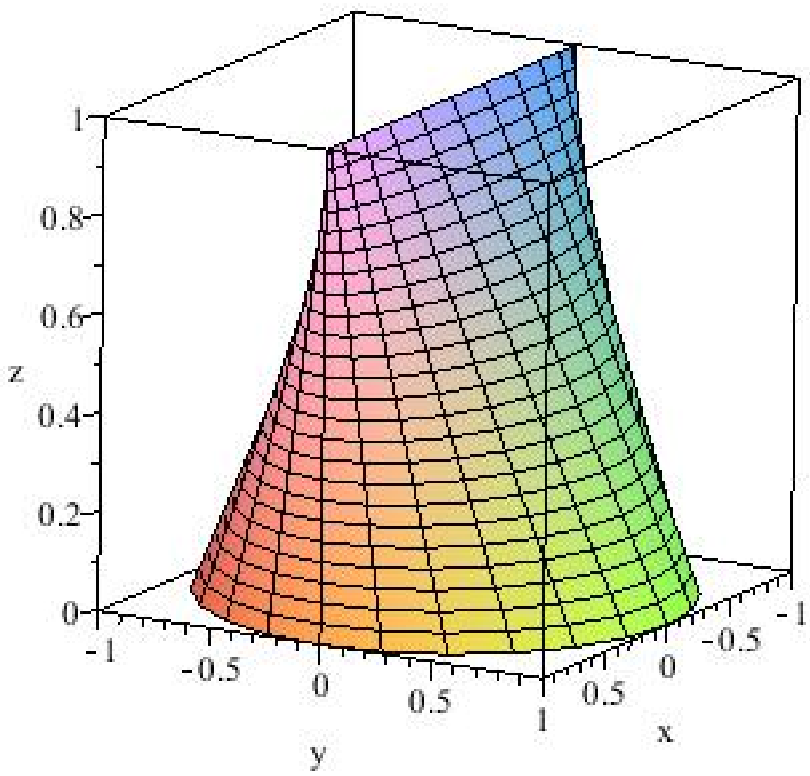
Мы хотим получить эллипсы с эксцентриситетом от 0 до 1. Эксцентриситет 0 — у окружности, пусть она будет внизу. Если уменьшать эксцентриситет при постоянной большой полуоси, эллипсы сжимаются и постепенно превращаются в отрезок прямой. Пусть этот отрезок, равный по длине диаметру нижней окружности и параллельный её плоскости будет вверху. Тогда пересекая поверхность плоскостью, параллельной нижней окружности, последовательно снизу вверх мы должны будем получать эллипсы с большой полуосью, равной радиусу этой окружности, а малая полуось будет уменьшаться от этого радиуса до нуля. Пусть у нас малая полуось уменьшается линейно. Тогда при каждом положении плоско-

*petrovandrej78@gmail.com

сти мы можем вычислить малую полуось из подобия треугольников. Теперь можно выбрать систему координат и составить уравнения поверхности. За точку отсчёта возьмём центр нижней окружности. Ось аппликат направим перпендикулярно этой плоскости в сторону верхнего отрезка. Ось абсцисс направим в плоскости окружности в таком же направлении, как верхний отрезок. Ось ординат — перпендикулярно оси абсцисс в плоскости окружности. Обозначим радиус окружности a, расстояние от точки отрезка до плоскости окружности h. Вспоминая, как записываются параметрические уравнения эллипса и вычисляя для каждого z малую полуось эллипса из подобия прямоугольных треугольников, получаем уравнения поверхности в параметрической форме:

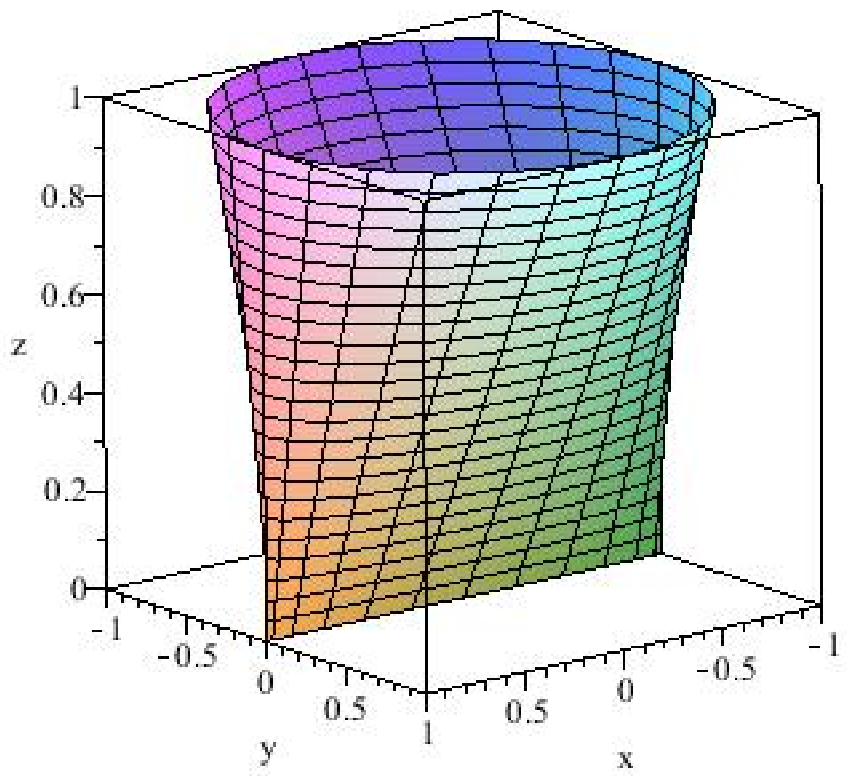
$$x = a\cos u, y = a\frac{h-v}{h}\sin u, z = v, v = 0..h, u = 0..2\pi$$

Вот как выглядит поверхность при $a = h = 1$:



Чуть более простые уравнения можно получить, перевернув поверхность, то есть взяв за точку отсчёта середину отрезка, ось аппликат направив перпендикулярно отрезку через центр окружности, ось абсцисс — вдоль отрезка, а ось ординат перпендикулярно оси абсцисс и параллельно плоскости окружности. Тогда получаем параметрические уравнения:

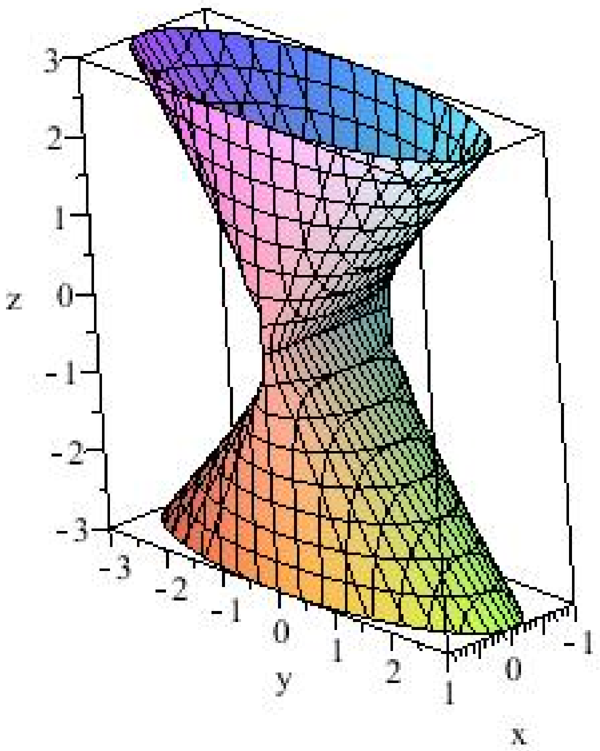
$$x = a\cos u, y = a\frac{v}{h}\sin u, z = v, v = 0..h, u = 0..2\pi$$



Отсюда, пользуясь тем, что сумма квадратов косинуса и синуса того же числа равна единице, можно получить, что точки искомой поверхности удовлетворяют следующему соотношению между x, y, z:

$$(x^2 - a^2)z^2 + h^2y^2 = 0$$

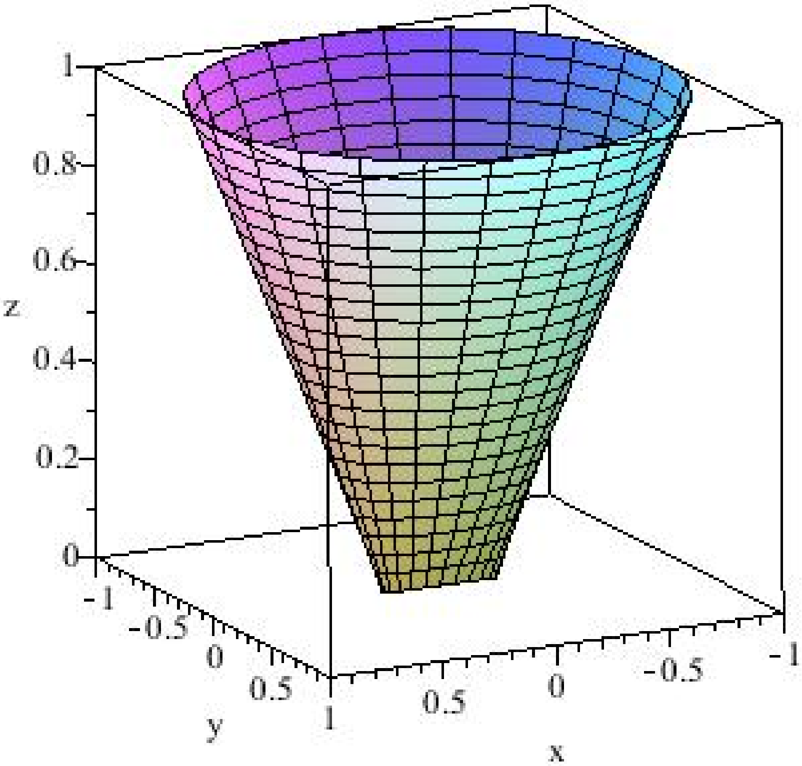
Из этого уравнения видно, что поверхность — четвёртого порядка. Она напоминает конус, но вместо одной вершины — целый отрезок вершин. Напомним, что обычный конус — поверхность второго порядка. Но указанному уравнению удовлетворяют не только точки искомой поверхности, при каждом фиксированном z выше верхней окружности уравнению удовлетворяют точки, лежащие на эллипсе, причем чем больше z, тем больше его бывшая малая полуось, а большая полуось остаётся постоянной, следовательно, экцентриситет увеличивается (в пределе — до единицы). Кроме того, поверхность, определяемая уравнением, симметрична относительно плоскости xy, т.к. с каждой точкой (x, y, z) ей принадлежит и точка $(x, y, -z)$. Таким образом, при движении плоскости параллельно плоскости xy от плюс бесконечности до минус бесконечности эксцентриситеты эллипсов в сечении поверхности этой плоскостью сначала уменьшаются от 1 до 0 ($h \leqslant z$), потом увеличиваются от 0 до 1 ($0 < z < h$), потом опять уменьшаются от 1 до 0 ($-h < z \leqslant 0$) и затем опять увеличиваются от 0 до 1 ($z \leqslant -h$). Причём, при переходе z через h и $-h$ большая и малая полуоси эллипса меняются ролями. Например, при $z = -3..3$ поверхность точек, удовлетворяющих этому уравнению, содержит искомую поверхность и имеет следующий вид:



Теперь рассмотрим более общий случай, когда длина отрезка $l < 2a$. Теперь при сечении искомой поверхности плоскостью, параллельной верхней окружности также получаются эллипсы, но в то время, как малая полуось изменяется по уже указанному закону, большая полуось a не остаётся постоянной, а также изменяется по аналогичному закону. И выражение для большой полуоси также получается из подобия прямоугольных треугольников. Получаем следующие параметрические уравнения:

$$x = \frac{lh + z(2a - l)}{2h} \cos u, y = a\frac{v}{h} \sin u, z = v, v = 0..h, u = 0..2\pi$$

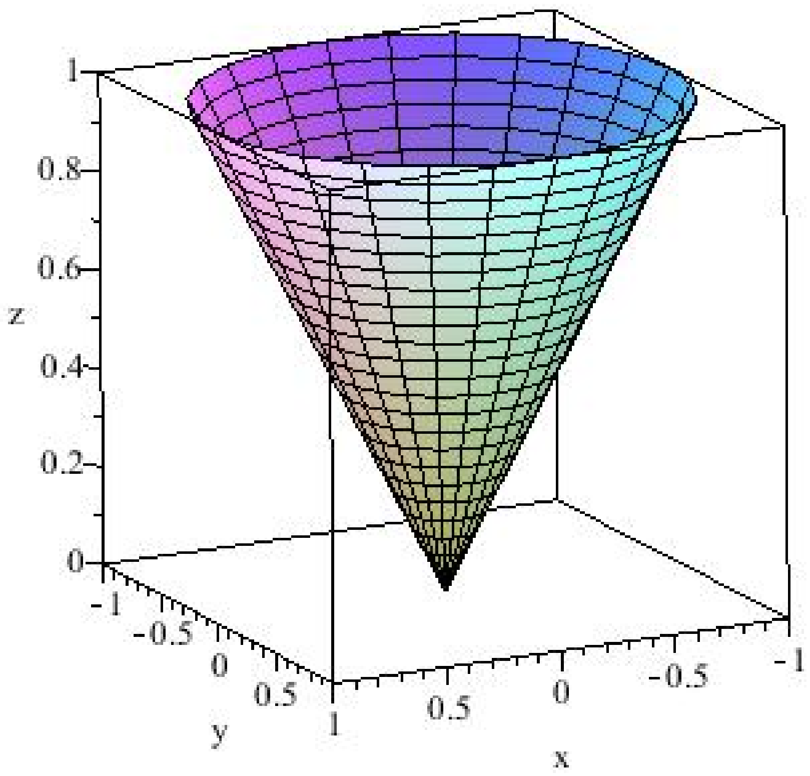
Вот как выглядит искомая поверхность при $a = h = 1$, $l = 0,5$:



Теперь точки искомой поверхности удовлетворяют следующему уравнению (также являясь точками поверхности четвёртого порядка):

$$4a^2h^2x^2z^2 + (y^2h^2 - a^2z^2)(lh + z(2a - l))^2 = 0$$

Из этого уравнения видно, что при $l = 2a$ получаем уже рассмотренное уравнение поверхности, а при $l = 0$ получаем уравнение кругового конуса (см. учебник А.В.Погорелова «Геометрия» 1983 года издания, стр.101):



Иными словами, изменяя l от $2a$ до 0 мы переходим от поверхности разных эксцентриситетов к поверхности постоянного нулевого эксцентриситета (в смысле сечений плоскостью, параллельной основанию).

II. Объём тела, ограниченного поверхностью

Разобъём высоту h на n равных частей и сложим, как из кирпичиков, приближение к телу, ограниченному поверхностью и плоскостью верхней оружности из эллиптических цилиндров (т.е. цилиндров, основания которых — равные эллипсы). Высоту каждого из них возьмём равной h/n, а в качестве основания k-го цилиндра — эллипс, получающийся сечением плоскостью поверхности параллельно её верхней окружности (мы сейчас рассматриваем поверхность разных эксцентриситетов при $l = 2a$, $z = 0..h$) на расстоянии kh/n от плоскости xy, $k = 1..n$. Вычислим при фиксированном натуральном $n > 1$ сумму объёмов этих n кирпичиков ($k = 1..n$), принимая во внимание, что площадь эллипса с полуосями a, b равна πab:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{n} \pi \frac{ka}{n} a = \frac{n+1}{n} \frac{\pi a^2 h}{2}$$

Переходя к пределу при n стремящемся к бесконечности получаем:

$$V = \frac{\pi a^2 h}{2}$$

Таким образом, объём тела, соответствующего поверхности разных эксцентриситетов в два раза меньше объёма цилиндра такой же высоты и с окружностью такого же радиуса в основании.

Теперь точно так же рассмотрим случай $l < 2a$, $z = 0..h$. В этом случае для каждого $n > 1$ получаем:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{n} \pi \frac{ka}{n} (\frac{l}{2} + (a - \frac{l}{2}) \frac{k}{n})$$

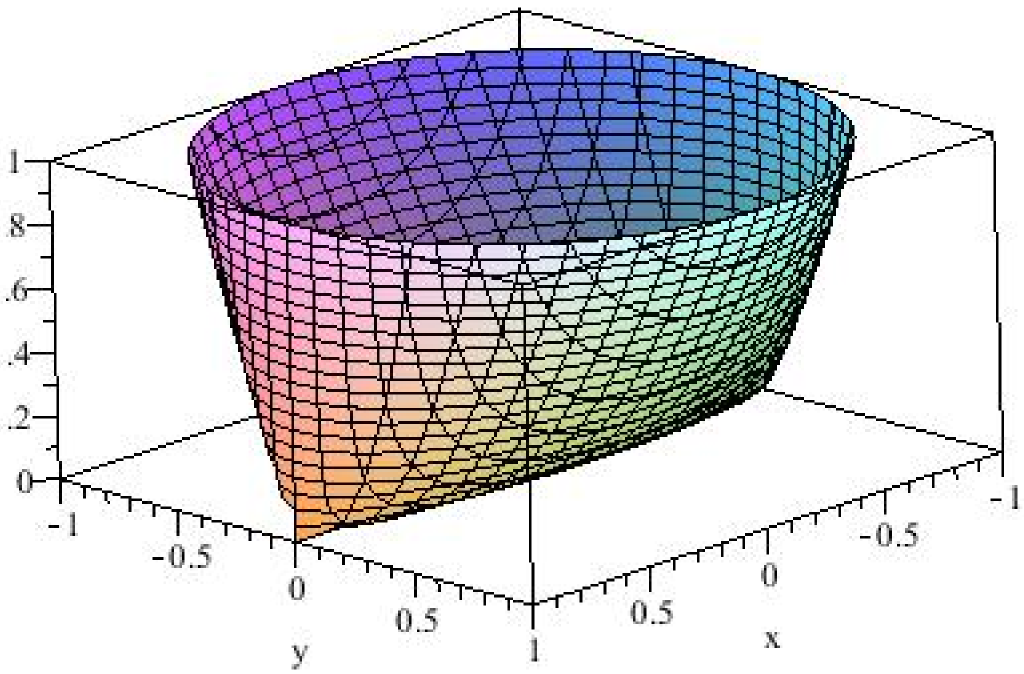
Пользуясь формулой суммы арифметической прогрессии и формулой суммы квадратов последовательных натуральных чисел, вычисляем эту сумму и переходим к пределу при n стремящемся к бесконечности. Получаем:

$$V = \pi a h (\frac{a}{3} + \frac{l}{12})$$

Отсюда видно, что при $l = 0$ эта формула переходит в формулу объёма конуса, а при $l = 2a$ — в формулу уже рассмотренного объёма.

III. Дальнейшие рассуждения

Заметим, что если мы не будем ограничиваться линейностью сечения в некоторых плоскостях, то мы можем взять в уравнении поверхности для $l = 2a$ вместо z в квадрате — просто z, эта поверхность будет третьего порядка и точно так же при сечении её плоскостью, параллельной плоскости xy на высотах от 0 до h мы будем получать эллипсы эксцентриситета от 1 до 0. Вот как она выглядит при $h = a = 1$, $z = 0..1$:



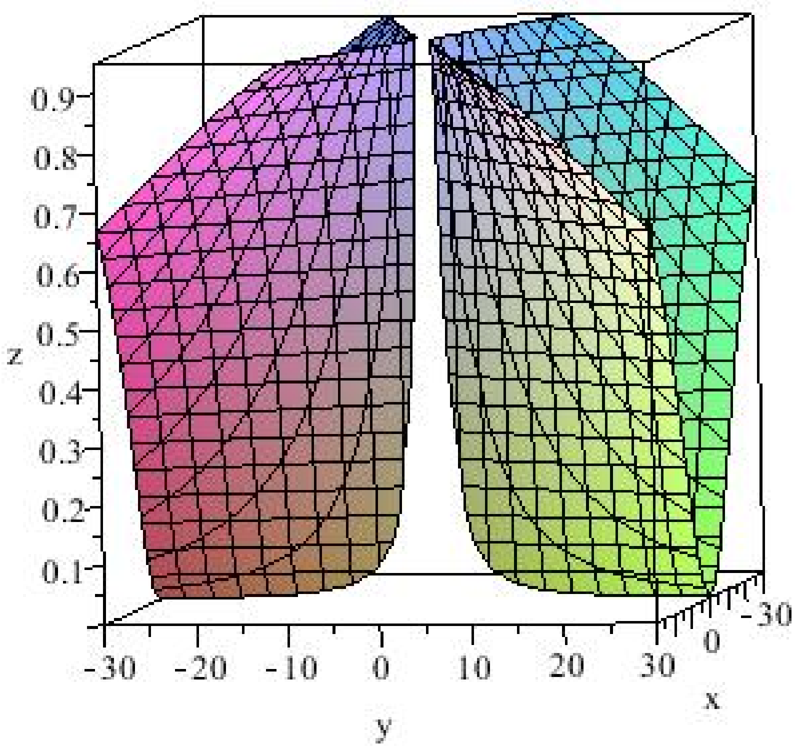
IV. Поверхность, содержащая эллипсы и гиперболы всех возможных эксцентриситетов

Всё это были поверхности, чем-то напоминающие конус. А теперь посмотрим, что мы получим, взяв поверхность, напоминающую гиперболоид. А именно, рассмотрим поверхность третьего порядка, задаваемую уравнением:

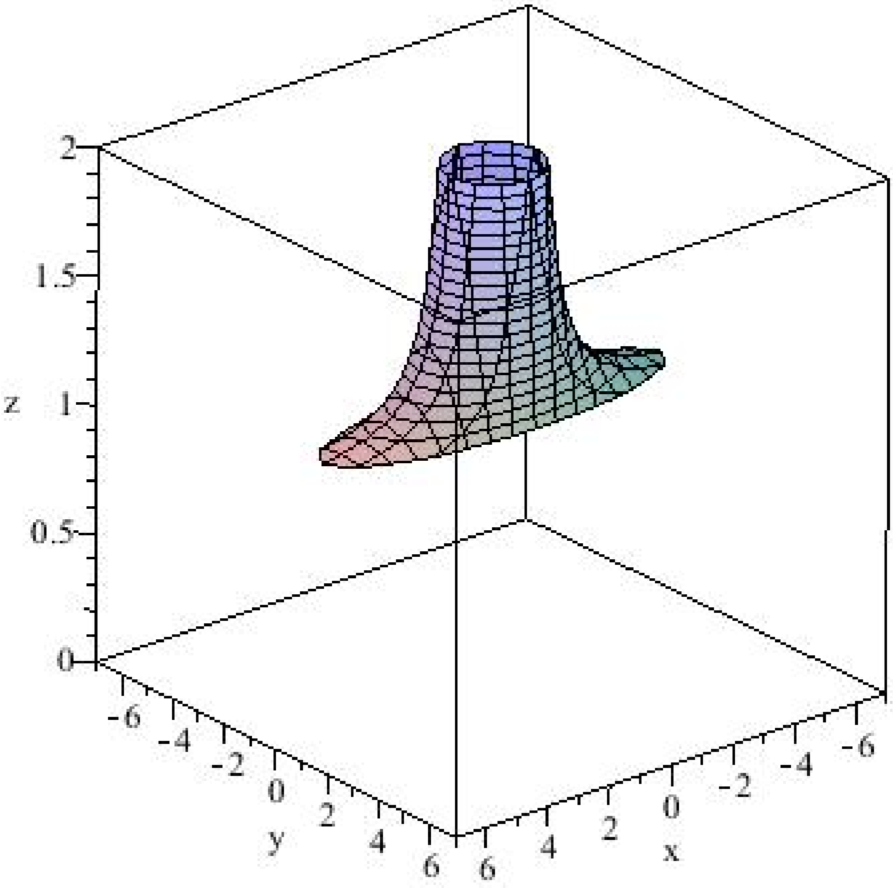
$$(z-1)x^2 + \frac{(y^2-1)z}{2} = 1$$

Будем пересекать её плоскостью, параллельной плоскости xy на высотах от 0 до 2. При z растущем от 0 до 1 мы будем получать в сечении гиперболы с эксцентриситетом, растущим от 1 до бесконечности, а при z растущем от 1 до 2 мы будем получать эллипсы с эксцентриситетом, уменьшающимся от 1 до нуля. Таким образом, мы получили уравнение поверхности, пересекая которую плоскостью, параллельной оси xy при $z = 0..2$ в сечении получаются кривые всех возможных эксцентриситетов (кроме параболы с эксцентриситетом равным 1) от 0 до бесконечности.

Вот как выглядит эта поверхность при $z = 0..0.95$:



А вот как она выглядит при $z = 1.05..2$:



1 Погорелов А.В. Геометрия. — М.:Наука, 1983