Нахождение центра, фокусов и осей конического сечения

Андрей Петров*

(Dated: 1 января 2013 года)

Для начала рассмотрим эллипс. В учебнике «Геометрия» А.В.Погорелова 1983 года в параграфе «Диаметры конического сечения» на стр.58 доказывается, что «середины параллельных хорд конического сечения лежат на диаметре». Поэтому проводим любую секущую эллипса, находим середину отрезка с концами в точках её пересечения с эллипсом, затем проводим параллельную ей секущую и также находим центр отрезка с концами в точках её пересечения с эллипсом. Соединяем эти два центра прямой. Она пройдёт через центр эллипса. Поскольку центр эллипса является его центром симметрии, то он делит любую хорду, проходящую через него, пополам. Поэтому находим середину отрезка с концами в точках пересечения полученной прямой с эллипсом, которая и будет его центром.

I. Эллипс

Намёк на то, как найти ось конического сечения содержится в способе определения полуденной линии, учитывая, что точка установки гномона лежит на оси конического сечения, которое вычерчивает тень от его верхушки в течение дня (это можно доказать, используя шары Данделена). Проводим окружность с центром в центре эллипса, который мы уже определили, так, чтобы она пересекла эллипс (а она пересечет, если её радиус будет больше малой и меньше большой полуоси эллипса). Поскольку эллипс симметричен относительно его осей, середина отрезка, соединяющего две соседние точки пересечения эллипса с окружностью, лежит на одной из двух его осей. Поэтому находим середину отрезка, соединяющего точку пересечения с одной соседней точкой и проводим прямую через эту середину и центр эллипса — это одна ось. Находим середину отрезка, соединяющего ту же точку со второй соседней точкой и проводим прямую через неё и центр эллипса — это вторая ось. Каждая ось пересекает эллипс в двух точках — концах отрезка оси. Сравниванием этих двух отрезков находим, какая из осей содержит большую, и какая — малую полуось эллипса.

*petrovandrej78@gmail.com

Итак, мы нашли центр эллипса и его оси. Для нахождения фокусов используем тот факт, что расстояние от конца малой полуоси до фокуса равно длине большой полуоси (см. стр. 57 учебника Погорелова). Проводим окружность с центром в конце малой полуоси и радиусом, равным длине большой полуоси. Две точки её пересечения с большой полуосью и будут фокусами эллипса.

II. Парабола

Рассмотрим теперь параболу. Точно так же как в случае эллипса, соединяем середины двух его параллельных хорд. Получаем прямую, параллельную его оси. Далее используем свойство симметрии параболы относительно её оси: проводим два перпендикуляра к прямой и находим середины двух отрезков с концами в точках пересечения этих двух прямых с параболой. Через эти две середины проводим прямую, она и будет осью параболы.

Для нахождения фокуса параболы используем тот факт, что по определению параболы, её вершина лежит посередине между фокусом и директрисой, а если провести перпендикуляр из фокуса к оси, длина отрезка с концами в фокусе и точке пересечения этой прямой с параболой будет равна расстоянию от фокуса до директрисы (Погорелов, стр. 48). Итак, откладываем на оси от вершины по направлению ветвей отрезок любой длины. Восставляем в его конце перпендикуляр к оси и откладываем на нём от оси отрезок, длина которого равна удвоенной длине первого отрезка. Соединяем конец второго отрезка с вершиной параболы прямой. Опускаем из точки пересечения этой прямой с параболой перпендикуляр на её ось. Основание этого перпендикуляра и будет фокусом параболы.

III. Гипербола

В случае гиперболы центр и оси находим так же, как и в случае эллипса. Окружность для нахождения оси надо взять с радиусом, большим длине большой полуоси. Пусть уравнение гиперболы задано в виде:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Отложим от центра гиперболы на её горизонтальной оси отрезок, равный утроенной длине большой полуоси (т.е.утроенному расстоянию от центра до вершины) и восставим в его конце перпендикуляр к горизонтальной оси гиперболы. Из уравнения гиперболы (Погорелов, стр.

51) следует, что расстояние от его основания до точки пересечения с гиперболой будет равна b, помноженному на два корня из двух. Далее этот отрезок делим пополам. Получаем отрезок длины, равной диагонали квадрата со стороной b. Проводим из его конца, не лежащего на горизонтальной оси, перпендикуляр на вертикальную ось. Его основание и центр гиперболы — концы отрезка такой же длины. Строим на нём как на диагонали квадрат (делим пополам, из середины описываем окружность, радиуса, равного половине его длины и восставляем к этой середине перпендикуляр к вертикальной оси, две точки пересечения которого с окружностью и будут двумя вершинами квадрата). Проводим окружность с центром в вершине квадрата и радиусом a, точка его пересечения с горизонтальной осью гиперболы и будет фокусом (по формуле на стр. 57 книги Погорелова). Второй фокус строим, отражая первый относительно вертикальной оси гиперболы.

На практике можно отложить отрезок не $3a$, а $2a$, восставить в его конце перпендикуляр к горизонтальной оси и измерить расстояние от его основания до точки пересечения с гиперболой. Это значение, поделенное на корень из трёх, и будет расстоянием от центра гиперболы до её фокусов.

1 Погорелов А.В. Геометрия. — М.:Наука, 1983